

Quasi-spektraler Mehrbereichsmessansatz durch Einsatz eines iterativ regularisierten, targetbezogenen Interpolators

Rico Nestler, Karl-Heinz Franke

Zentrum für Bild- und Signalverarbeitung e.V.
Gustav-Kirchhoff-Str. 5, D-98693 Ilmenau
eMail: rico.nestler@zbs-ilmenau.de
Web: www.zbs-ilmenau.de

Zusammenfassung: Im Rahmen dieses Beitrages wird eine Möglichkeit vorgestellt, um durch definierte iterative Annäherung an die lineare Lösung der targetbezogenen Pseudo-Inversen ein robustes Interpolationssystem zur quasi-spektralen Rekonstruktion niederdimensional abgetasteter Farbreize zu ermitteln. Durch zusätzlich einbezogene Randbedingungen kann gezielt Einfluss auf die Lösung, deren Rekonstruktions- und Toleranzverhalten und die Verfahrenskonvergenz genommen werden. Das Ziel ist hierbei, einen Rekonstruktionsansatz mit sowohl gutem und generellem Reproduktionsvermögen für einbezogene und gestaltähnliche spektrale Charakteristiken als auch mit robusten Toleranzeigenschaften zu realisieren. Anstelle der Verwendung von Inversen schlecht konditionierter Matrizen wird im Rahmen des iterativen Prozesses eine Lösungsannäherung in der umgekehrten, gut konditionierten Richtung des Abtastvorgangs gesucht. Ergebnisse und Aspekte des praktischen Einsatzes werden am Beispiel eines Mehrbereichsmesssystems zur quasi-spektralen Messung von Auflichtvorlagen dargestellt.

1. Einleitung

Der physikalische Farbreiz $\varphi(\lambda)$ bestimmt die farbliche Erscheinung eines Objektes. Darin sind dessen spektrale Lichtwechselwirkung und im Fall von Nichtselbstleuchtern die Charakteristik der eingesetzten Lichtart verbunden. Den resultierenden Farbeindruck metrisch zu beschreiben, ist messtechnisch direkt colorimetrisch oder indirekt über die Charakterisierung der spektralen Gestalt des Farbreizes möglich.

Bei der direkten colorimetrischen Messung nach dem Dreibereichsverfahren wird der Sensorfarbraum durch die Systemkonfiguration, d.h. die Sensorempfindlichkeiten und die eingesetzte Beleuchtung, vorbestimmt, so dass der Bezug zu einer erwünschten standardisierten (geräteunabhängigen) Farbbeschreibung nachfolgend nur durch Korrektur möglich ist. Dementsprechend sind hier die Möglichkeiten weiterer colorimetrischer Analysen eingeschränkt.

Zur hinreichend genauen Charakterisierung der spektralen Gestalt eines Farbreizes kommt üblicherweise nur ein spektraler Messansatz, das Spektralverfahren, in Betracht. Hier erfolgt die Messung und Rekonstruktion anhand einer bewusst übergroßen Zahl k weitestgehend unabhängiger Abtastwerte des Farbreizes. Diese werden in einem zu meist regelmäßigen diskreten Raster erfasst. Die spektrale Apertur ist hierbei im Fall einer sequentiell monochromatischen Messung oft identisch, im Fall eines filterbasierenden Ansatzes meist kanalspezifisch. Unter Berücksichtigung einer durch Referenzmessung ermittelten spektralen Systemkonstanten ist die Korrektur des Geräteeinflusses im hochdimensionalen Geräteraum und damit der Rückschluss auf die radiometrischen Eigenschaften des Messobjektes möglich. Zur Herstellung des geforderten Zieldefinitionsbereiches des Ergebnisses $\lambda_{\text{start}} + n \cdot \Delta\lambda$, $n \neq k$ kommen etablierte Interpolationsverfahren zum Einsatz, welche aufgrund der Vielzahl der Abtastwerte die Eigenschaften des zu rekonstruierenden Farbreizes oder des Messsystems im Allgemeinen weder beachten noch einbeziehen (müssen). Sie sind aus diesem Grund a-priori-frei. Der unter Umständen verunschärfende Einfluss des Abtastrasters und der spektralen Apertur bleibt hierbei im Messergebnis erhalten. Das Spektralverfahren hat den Vorzug,

dass durch Rekonstruktion der spektralen Objektcharakteristik beliebige colorimetrische Analysen auf rein rechnerischem Weg möglich sind.

Mit Verringerung der Zahl der verfügbaren Abtastwerte $k < n$ und mit Zunahme der spektralen Aperturbreite der Kanalempfindlichkeiten des Messsystems geht das Spektralverfahren in einen Mehrbereichsansatz über. Die Gestaltung der durch einen derartigen Mehrbereichssensor realisierten Sensorempfindlichkeiten (siehe Abbildung 1, links) folgt hierbei nicht colorimetrischen, sondern nur allgemein technologischen, energetischen oder auch applikativen Überlegungen. Soll mit dieser geringeren Zahl integraler Abtastwerte dennoch eine Farbreizcharakterisierung ähnlich dem Spektralverfahren erfolgen, so kommt dem verwendeten Interpolationsansatz eine erheblich größere Bedeutung zu. Zur Unterscheidung der verschiedenen Messansätze soll dieser Fall als *quasi-spektrales* Messen bezeichnet werden.

2. Mehrkanalige Abtastung und quasi-spektrale Rekonstruktion mittels Pseudo-Inverser

Die Abtastoperation eines allgemeinen Mehrbereichssensors überführt den hochdimensionalen Farbreiz $\underline{\varphi}^1$ in einen Vektor $\underline{a}$ der Abtastwerte (Spaltenvektor aus den Einzelsignalen der Messkanäle) eines Raumes der Dimension k . Die Abtasteigenschaften des Messsystems werden hierbei durch eine Gerätematrix $\underline{G}$ verkörpert, welche die Bestimmungskomponenten der spektralen Kanalempfindlichkeit, wie z.B. kanalbezogene Filtercharakteristik $\underline{f}^l$ und die Basisdetektorempfindlichkeit $\underline{b}$, beinhaltet.

$$\varphi(\lambda) \rightarrow \underline{\varphi} = (\varphi_i)_{i=1,\dots,n} \quad \underline{\varphi} \in \mathbb{R}^n$$

$$\underline{a} = \underline{G} \bullet \underline{\varphi} \quad (\text{Abtastung } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ in Matrixnotation})$$

$$\underline{a} = (a_l)_{l=1,\dots,k} \quad \underline{a} \in \mathbb{R}^k$$

$$\underline{G} = (g_{lm})_{\substack{l=1,\dots,k \\ m=1,\dots,n}} \quad \text{mit } g_{lm} = b_m \cdot f_m^l$$

Der quasispektrale Rekonstruktionsschritt kehrt die Abtastoperation um und projiziert aus dem Raum der Abtastwerte in den n -dimensionalen Ergebnisraum zurück. Dabei wird jedem Punkt des Sensorraumes ein Punkt des Ergebnisraumes (spektrale Gestalt) zugeordnet. Der zugehörige Interpolator $\underline{I}$ muss die folgende Operation durchführen.

$$\underline{\tilde{\varphi}} = \underline{I} \bullet \underline{a} \quad (\text{quasi-spektrale Rekonstruktion } \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ in Matrixnotation})$$

$$\underline{I} = (i_{ml})_{\substack{m=1,\dots,n \\ l=1,\dots,k}}$$

Dies entspricht einer Linearkombination der den Abtastwerten a_l zugeordneten gewichteten Einzelbeiträge des Interpolators $(i_l^T \cdot a_l)$ direkt für den gewünschten Zieldefinitionsbereich. Der Rekonstruktionsschritt ist somit linear. Zur Invertierung der Abtastoperation müssen die Interpolatorfunktionen hierbei minimal die Eigenschaften des abtastenden Systems (Gerätematrix) einbeziehen.

$$\underline{\tilde{\varphi}} = \underline{I} \bullet \underline{a} = \underline{I} \bullet (\underline{G} \bullet \underline{\varphi}) = \underline{I} \bullet \underline{G} \bullet \underline{\varphi}$$

$$\underline{\tilde{\varphi}} = \underline{\varphi} \quad \text{wenn } \underline{I} \stackrel{!}{=} \underline{G}^{-1}$$

¹ Im Rahmen dieser Betrachtung ist der Definitionsbereich der Ausgangsfarbreizbeschreibung ausreichend fein diskretisiert.

Bei Mehrbereichssensoren, die eine Abbildung in einen Raum kleinerer Dimension, d.h. mit $k < n$, durchführen, wird die vormals unendliche Vielfalt möglicher Farbreizausprägungen auf eine erheblich kleinere Menge im Sensorraum reduziert. Aufgrund der damit mehrdeutigen Abbildung folgt daraus, dass nicht mehr alle Farbreizausprägungen unterscheidbar bzw. erkennbar² sind (Beobachtermetamerie) und somit daraus nicht im Ursprung rekonstruiert werden können. Durch die gezielte Anpassung der Sensorempfindlichkeiten eines Mehrbereichssensors an applikative Belange kann jedoch auf die Einhaltung der Eindeutigkeitsbedingung für einen definierten spektralen Targetsatz Bezug genommen werden. Für eine Vielzahl von breitbandigen Auf- und Durchlichtanwendungen hat sich gezeigt, dass die zur quasi-spektralen Messung bzw. Rekonstruktion erforderliche Unterscheidbarkeit auch in niederdimensionalen Räumen mit $k = 6 - 7$ gegeben ist [1][2]. Hierbei muss angenommen werden, dass sich die wesentlichen gestaltrelevanten Unterschiede auch in differierenden Abtastwertverhältnissen äußern und ähnliche Abtastwertverhältnisse aus ähnlichen spektralen Gestalteigenschaften resultieren.

Infolge der bestehenden linearen Abhängigkeit der Abtastwerte (überlappende Messaperturen) ist das zu lösende Invertierungsproblem schlecht konditioniert. Ausdruck hierfür ist u.a. ein instabiles Verhalten der Ergebnisse gegenüber kleinen Änderungen der Eingabewerte und an Sprungstellen des zu rekonstruierenden Farbreizverlaufs. Schwankungen der Eingabewerte sind in realen Messsystemen durch Realisierungstoleranzen der spektralen Charakteristik der Systemkomponenten, Einflüsse der Messgeometrie und durch Messunsicherheiten allgegenwärtig und somit beim Methodenentwurf und der Bewertung zu berücksichtigen.

Durch die Relation $k < n$ kann im Fall eines Mehrbereichsansatzes die Invertierungsoperation der Gerätematrix nicht direkt, sondern nur mit Hilfe des mathematischen Konstruktes der Pseudo- oder Moore-Penrose-Inversen durchgeführt werden. Diese ist wie folgt definiert.

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{G}}^+ = \underline{\underline{G}}^T \bullet (\underline{\underline{G}} \bullet \underline{\underline{G}}^T)^{-1} \quad (1)$$

Diese Pseudo-Inverse ist unregularisiert, d.h. die n Freiheitsgrade des Lösungsraumes sind allein durch die k Abtastwerte beschränkt. $(n - k)$ -Freiheitsgrade bleiben demnach frei wählbar. Diese Tatsache ist charakteristisch für alle schlecht konditionierten inversen Probleme.

Die Anwendung dieser unregularisierten Pseudo-Inversen führt im Fall eines Mehrbereichssensors nur zu unbrauchbaren Ergebnissen. Hier nimmt infolge der mit abnehmender Kanalzahl oft integral breiteren Kanalcharakteristik (Apertur) die Abtastwertkorrelation zu, weshalb an dieser Stelle Möglichkeiten der Regularisation gefunden werden müssen, um den Einsatz einer Pseudo-Inversen mit sowohl gewünschter Ergebnisgüte als auch robusten Toleranzeigenschaften zu ermöglichen. Da die Regularisation Vorwissen über die Messaufgabe bzw. die Messobjekte in unterschiedlich restriktiver Form in den (Interpolation-)Rekonstruktionsansatz einbringt, wird dementsprechend dessen Anwendbarkeit auf diese Fälle mehr oder weniger stark eingeschränkt.

Es existieren ausgehend von der Definition (1) der Pseudo-Inversen einige Varianten, die in diesem Sinne zusätzlich über eine Matrix $\underline{\underline{W}}_{(n,n)}$ linear regularisiert sind [3][4].

² Eine denkbare Situation ist die Abtastung sehr schmalbandiger Farbreize mit ebenfalls schmalbandigen kanalbezogenen Sensorempfindlichkeiten.

unregularisierte Pseudo-Inverse $\underline{\underline{G}}^+ = \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{G}}^T \cdot (\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{G}}^T)^{-1}$ $\underline{\underline{W}} = \underline{\underline{E}} \quad (\text{Einheitsmatrix})$	„glättende“ Pseudo-Inverse $\underline{\underline{G}}^{+NB} = \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{G}}^T \cdot (\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{G}}^T)^{-1}$ $\underline{\underline{W}} = (w_{ij})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n} = (\underline{\underline{N}} + \varepsilon \cdot \underline{\underline{E}})^{-1}$ $\underline{\underline{N}}$ singuläre Operatormatrix für spektralen Differenzenquotienten $\underline{\underline{N}} = (n_{ij})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n}$ ε Regularisationskonstante $\varepsilon > 0$
„Wiener“-Pseudo-Inverse $\underline{\underline{G}}^{+Wiener} = \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{G}}^T \cdot (\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{G}}^T)^{-1}$ $\underline{\underline{W}} = (w_{ij})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n} \text{ mit } w_{ij} = \rho^{ i-j }, \rho < 1.0$	targetbezogene Pseudo-Inverse $\underline{\underline{G}}^{+\Phi Opt} = \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{G}}^T \cdot (\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{G}}^T)^{-1}$ $\underline{\underline{W}} = \underline{\underline{\Phi}}^{Target} \cdot (\underline{\underline{\Phi}}^{Target})^T = (w_{ij})$ mit $\underline{\underline{\Phi}}^{Target} = (\varphi_h^{Target})_{h=1,\dots,t}$ $\underline{\underline{W}}$ w_{ij} - targetsatzbezogene Korrelation der Abtastwerte i und j $\underline{\underline{\Phi}}^{Target}$ spektraler Targetsatz

Die targetbezogene Pseudo-Inverse $\underline{\underline{G}}^{+\Phi Opt}$ ist die am restriktivsten regularisierte Variante wird aber aus Sicht der erzielbaren Rekonstruktionsgüten favorisiert. Die gestaltrelevanten Korrelationseigenschaften werden hier direkt einem vorgegebenen (applikativen) Targetsatz entnommen. $\underline{\underline{G}}^{+\Phi Opt}$ rekonstruiert damit unter Einbeziehung der spektralen Charakteristiken des Targetsatzes diese und gestaltähnliche Targets mit hoher Güte. Hierbei können selbst dynamische Gestalteigenschaften auch aus wenigen Abtastwerten rekonstruiert werden, sofern diese Formcharakteristik im Targetssatz ausreichend manifestiert ist. Der Auswahl von $\underline{\underline{G}}^{+\Phi Opt}$ kommt entgegen, dass bei meisten praktischen Messanwendungen und –applikationen die Messsystemkomponenten charakterisierbar sind und von einem begrenzten Umfang „ähnlich“ strukturierter spektraler Farbreizcharakteristiken ausgegangen werden kann, die erfasst und ausreichend genau charakterisiert werden müssen. Der Definitionsbereich des Rekonstruktionsergebnisses wird durch den Definitionsbereich der spektralen Systembeschreibung (Gerätematrix) bzw. des gegebenen Targetsatzes festgelegt und im Zuge der Anwendung der Inversen hergestellt.

Die konditionsbedingten Eigenschaften aller Pseudo-Inversen, die aus den durch die Messsystemkonfiguration realisierten Abtastwerten resultiert, wird jedoch durch das sehr überspezielle Verhalten der targetbezogenen Pseudo-Inversen auch auf Abweichungen der Formeigenschaften der realen Messobjekte vom Targetsatz übertragen [3].

Neben der Bestimmung der spektralen Charakteristik eines Farbreizes ist ein wesentlicher Vorzug rein spektraler Messansätze, dass geräteunabhängige, d.h. nur das Messobjekt charakterisierende Messergebnisse, ableitbar sind. Dazu ist es im Falle von nicht selbstleuchtenden Objekten notwendig, den Farbreiz in seine Komponenten zu zerlegen.

- $\underline{\varphi} = (\beta_i \cdot l_i)_{i=1,\dots,n}$ Farbreizzusammensetzung für Auflichtvorlagen
 $\underline{\varphi} = (\tau_i \cdot l_i)_{i=1,\dots,n}$ Farbreizzusammensetzung für Durchlichtvorlagen
 $\underline{\beta}, \underline{\tau}$ spektrale Lichtwechselwirkung (Remission, Transmission) eines Messobjektes
 $\underline{l}$ spektrale Charakteristik eines technischen Messlichtes

Im Kontext des beabsichtigten quasi-spektralen Rekonstruktionsschemas kann dieser Vorgang durch Einbeziehung der Lichtquelle in die Gerätematrix bzw. in den Interpolator direkt im Zuge der Rekonstruktion durchgeführt³ werden.

$$\begin{aligned}
 \underline{a} &= \underline{\beta} \bullet \underline{G}^\beta \\
 \underline{G}^\beta &= (g_{lm})_{\substack{l=1,\dots,k \\ m=1,\dots,n}} \text{ mit } g_{lm} = l_m \cdot b_m \cdot f_m^l \\
 \underline{W}^\beta &= \underline{\Phi}^{\beta\text{Target}} \bullet (\underline{\Phi}^{\beta\text{Target}})^T \text{ mit } \underline{\Phi}^{\beta\text{Target}} = (\beta_h^{\text{Target}})_{h=1,\dots,t} \\
 \underline{I}^\beta &= \underline{G}^{+\Phi\text{Opt}} = \underline{W}^\beta \bullet (\underline{G}^\beta)^T \bullet (\underline{G}^\beta \bullet \underline{W}^\beta \bullet (\underline{G}^\beta)^T)^{-1}
 \end{aligned}$$

3. Iterative targetbezogene Pseudo-Inverse

Im Rahmen dieses Beitrages wird eine Möglichkeit vorgestellt, um durch definierte iterative Annäherung an die lineare Lösung der targetbezogenen Pseudo-Inversen ein robustes Interpolationssystem zu ermitteln, dass ein generelleres Reproduktionsvermögen für die einbezogenen spektralen Charakteristiken und ein robusteres Toleranzverhalten besitzt. Durch zusätzlich einbezogene Randbedingungen kann gezielt Einfluss auf die Gestalt der Lösung, das Rekonstruktions- und Toleranzverhalten und die Verfahrenskonvergenz genommen werden. Anstelle der Verwendung von Inversen schlecht konditionierter Matrizen wird im Rahmen des iterativen Prozesses eine Lösungsannäherung in der umgekehrten, gut konditionierten Richtung des Abtastvorgangs gesucht.

Die iterative targetbezogene Pseudo-Inverse resultiert aus folgendem Optimierungsansatz zur Minimierung des multivariaten skalaren Funktional O .

$$O = \chi(\underline{I}) + \alpha_1 \cdot \Psi_1(\underline{I}) + \dots$$

$$\underline{I}^{\text{est}} : \min(O)$$

$\chi(\underline{I})$ LSE-Hauptbedingung zur bestmöglichen
 radiometrischen Rekonstruktion des Targetsatzes $\underline{\Phi}^{\text{Target}}$

$$\chi(\underline{I}) = \sum_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1,\dots,t} (\underline{\Phi}^{\text{Target}} \bullet \underline{G} \bullet \underline{I} - \underline{\Phi}^{\text{Target}})_{ij}^2$$

$\Psi_1(\underline{I})$ Nebenbedingung bezüglich Gestalt und Beschreibung des Interpolators
 α_r Regularisationskonstante

Ohne Berücksichtigung von Nebenbedingungen ($\alpha = 0$), d.h. im unregularisierten Fall, entspricht das Ergebnis bei vollständiger Konvergenz der direkten targetbezogenen Pseudo-Inversen $\underline{G}^{+\Phi\text{Opt}}$. Die Einflussnahme auf das Ergebnis erfolgt im Wesentlichen durch definierten Abbruch des Optimierungsvorgangs bei Erreichen gesetzter Konver-

³ Für die Abtastoperation gilt bezüglich ihrer Komponenten „spektral“ das Distributivgesetz.

genz- und Gütegrenzen aber auch durch Berücksichtigung von regularisierenden Randbedingungen. Beim Minimierungsprozess wirken dann Haupt- und Nebenbedingungen bezüglich des LSE-Kriteriums gegenläufig. Im Rahmen der iterativen Annäherung an eine Lösung können beliebig komplexe, auch nicht lineare Randbedingungen einfach einbezogen werden. Darüber sind vor allem Probleme, wie sie bei der direkten Pseudo-Inversen im Fall ungünstig oder zu klein gewählter Targetsätze auftreten, gut beherrschbar.

Eine Möglichkeit direkt Einfluss auf die spektrale Gestalt des Schätzergebnisses zu nehmen, besteht in der Einbeziehung einer Konditionierungsbewertung in die Interpolatorlösung. Diese verhindert einen Interpolator mit zu starker gegenseitiger linearer Abhängigkeit der Interpolationsfunktionen und verringert gleichermaßen die Toleranzwirkung durch Verstärkung der kanalbezogenen Rekonstruktionsbeiträge nur um den Abtastort. Abgeleitet von der in der Numerik gebräuchlichen Konditionsbewertung quadratischer Matrizen ergibt sich für die nicht-quadratische Interpolationsmatrix folgende Definition.

$$c_a(\underline{I}) = \|\underline{I}^T \bullet \underline{I}\|_a \cdot \left\| (\underline{I}^T \bullet \underline{I})^{-1} \right\|_a \geq 1 \rightarrow \alpha \cdot \Psi(\underline{I}) = \alpha \cdot \|\underline{I}^T \bullet \underline{I}\|_a \cdot \left\| (\underline{I}^T \bullet \underline{I})^{-1} \right\|_a$$

Die so konstruierte Konditionszahl gibt den Grad der linearen Abhängigkeit der Interpolationsfunktionen wieder. Die Kennzeichnung a legt hierbei die verwendete Matrixnorm⁴ fest.

Spektrale Targetsätze weisen oft messursächliche Unvollkommenheiten (Ausreißer) und stochastische Messunsicherheiten auf. Derartig eng begrenzte, spektrale Deformationen sollten, da sie zur generellen Gestaltreproduktion durch den Interpolator nicht relevant sind, unberücksichtigt bleiben. In den Abtastwerten sind diese zumeist gar nicht detektierbar, werden aber bei direkter Invertierung in Bezug zu der gestörten spektralen Referenzgestalt gesetzt. Eine Möglichkeit, dies zu erreichen, ist es, eine Beschränkung der Freiheitsgrade der Interpolatorbeschreibung vorzunehmen. Dies erfolgt durch Forderung einer fixen oder adaptiven spektralen Mindestkorrelation der Interpolatorfunktionen (z.B. durch spektrale Faltung mit einem fixen oder adaptiven Filterkern). In Form der Nebenbedingung

$$\Psi(\underline{I}) = \alpha \cdot eDOF = \alpha \cdot \sum_{m=1, \dots, n} \sum_{l=1, \dots, k} \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \delta_{ml}}$$

δ_{ml} Breitenparameter eines gaußförmigen Filterkerns zur Anwendung an der Stelle m für die l -te Interpolationsfunktion

kann hierbei das Finden der lokal optimalen Korrelationsweite in den Optimierungsprozess einbezogen werden.

Zur Lösung des resultierenden multivariaten und je nach Randbedingung auch nicht linearen Optimierungsproblems kommen etablierte Gradientenabstiegsverfahren zum Einsatz. Die Bestimmung erfolgt, beginnend von einer Startschätzung, unter Berücksichtigung der partiellen Ableitungen des Funktional O nach allen $(k \cdot n)$ -Lösungskoeffizienten der Interpolationsmatrix. Bezüglich der Hauptbedingung $\chi(\underline{I})$ ist dessen Ableitung analytisch wie folgt im Matrixformalismus formulierbar.

$$\frac{\partial O}{\partial i_{ml}} = \frac{\partial \chi(\underline{I})}{\partial i_{ml}} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1, \dots, t} (\underline{I} \bullet \underline{G} \bullet \underline{\Phi}^{\text{Target}} - \underline{\Phi}^{\text{Target}})_{ij}^2 \right)}{\partial i_{ml}}$$

⁴ $a \rightarrow Z$ bzw. ∞ - maximale Zeilenbetragssumme, $a \rightarrow S$ bzw. 1 - maximale Spaltenbetragssumme, $a \rightarrow F$ bzw. 2 - Frobenius- oder Spektralnrm

mit

$$\underline{\underline{R}} = (\underline{\underline{I}} \bullet \underline{\underline{G}} \bullet \underline{\underline{\Phi}}^{\text{Target}} - \underline{\underline{\Phi}}^{\text{Target}}) = (r_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,t}} \quad (\text{spektrale Residuenmatrix})$$

und

$$\underline{\underline{A}}^{\text{Target}} = \underline{\underline{G}} \bullet \underline{\underline{\Phi}}^{\text{Target}} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,t}} \quad (\text{Matrix der Abtastwerte})$$

$$\underline{\underline{\Lambda}} = (\kappa_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,t}} = \frac{\partial (\underline{\underline{I}} \bullet \underline{\underline{A}}^{\text{Target}})}{\partial i_{ml}} = \frac{\partial \underline{\underline{I}}}{\partial i_{ml}} \bullet \underline{\underline{A}}^{\text{Target}} \quad \kappa_{ij} = \begin{cases} a_{jl} & | \quad i = m \quad \forall j \\ 0 & | \quad \text{sonst} \end{cases}.$$

folgt

$$\frac{\partial O}{\partial i_{ml}} = 2 \cdot \sum_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1,\dots,t} r_{ij} \cdot \kappa_{ij} = 2 \cdot (r_{m1}, \dots, r_{mt})^T \bullet (a_{1l}, \dots, a_{tl})$$

Der Gradient des Lösungskoeffizienten i_{ml} entspricht dem dyadischen Produkt des Residuenvektors am Abtastindex m mit dem Vektor aller l -ten Abtastwerte für das gesamte Targetset. Analog werden die Gradienten für alle weiteren Nebenbedingungen bestimmt und einbezogen. Innerhalb dieses Schemas ist die selektive Anwendung bestimmter Nebenbedingungen auf bestimmte Interpolatorenbeiträge denkbar.

Als Startschätzung des Iterationsvorgangs sind z.B. ein a-priori-freier S_i -Interpolator oder ein Null-Interpolator geeignet. Die Verwendung der linearen Lösung $\underline{\underline{G}}^{+,\Phi\text{Opt}}$ als Startpunkt, ist nur im Falle einbezogener Nebenbedingungen geeignet, so dass darüber die Barriere in der Umgebung des lokalen Minimums des Funktional O um $\underline{\underline{G}}^{+,\Phi\text{Opt}}$ hin zur gesuchten Lösung überwunden werden kann.

4. Beispiel und Aspekte des praktischen Einsatzes

Die Demonstration des Einsatzes der iterativen targetbezogenen Pseudo-Inversen zur quasi-spektralen Rekonstruktion erfolgt für ein mehrkanaliges Sensormodell mit $k = 6$ Messkanälen. Die konkrete Gestaltung der Kanalempfindlichkeiten basiert auf Überlegungen im Zusammenhang mit der Umsetzung in einem miniaturisierten mehrkanaligen Sensorkonzept zur Messung von Auflichtvorlagen. Neben den realisierten Filterfunktionen wird als zusätzlicher Abtastwert ein panchromatischer Kanal einbezogen (siehe Abbildung 1, links). Dieser erfordert kein gesondertes Filterdesign, da er letztlich durch die Empfindlichkeit des verwendeten Sensorbasismaterials gebildet werden kann. Dieser Entscheidung liegt die Idee zugrunde, dass die Verlagerung wesentlicher Teile der gemeinsamen Gestaltkomponenten des zu rekonstruierenden Targetsets (Herstellung einer Grundgestalt) auf den Beitrag dieses Kanals eine spektral selektivere Wirkung der übrigen Kanäle nach sich zieht. Darüber hinaus kann dadurch die radiometrische Rekonstruktionsgüte signifikant erhöht werden.

Als Lichtquellen zur Messung von nicht selbstleuchtenden Objekten kommen bei kompakten Messsystemen aufgrund des begrenzt verfügbaren Bauraums nur LED-basierende Quellen in Betracht. Die Simulation wurde an dieser Stelle mit einer Weißlicht-LED durchgeführt, deren breitbandige R-G-B-Fluoreszenz durch LED-UV-Anregung zustande kommt⁵ (siehe Abbildung 1, rechts).

⁵ Weißlicht-LED True-White-TG-E1S40, Hersteller: ToyodaGosei (Prinzip mit UV-LED-Anregung und Kombination von sogenannten R-, G- und B-Phosphoren)

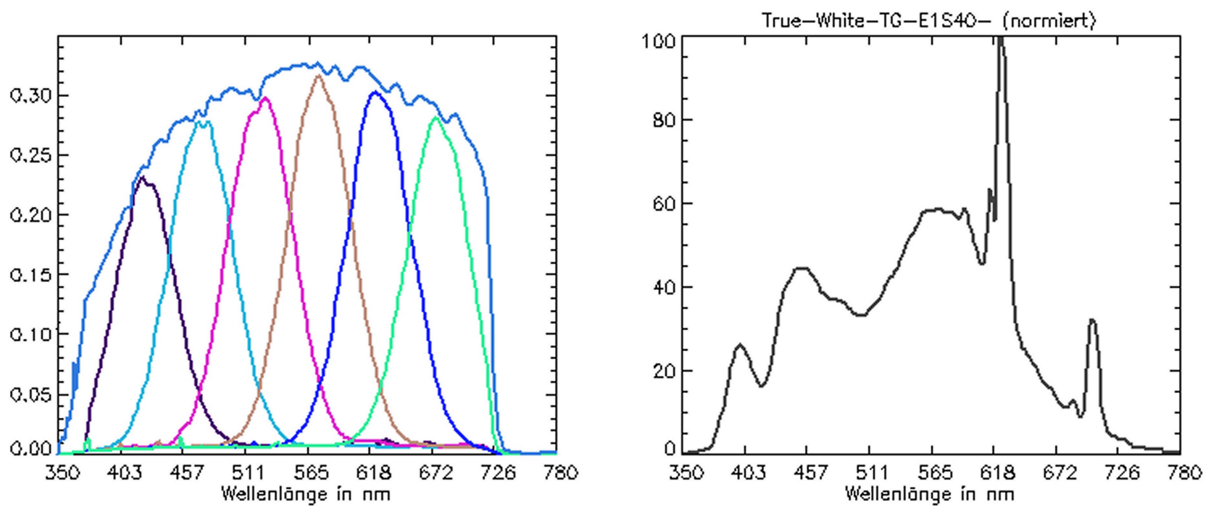


Abbildung 1: Sensorempfindlichkeiten eines 6 + 1-Mehrkanalsensors -links-, normierte Beleuchtungscharakteristik einer Weißlicht-LED Typ TG-E1S40 lt. Datenblatt -rechts -

Als spektraler (Remissions)Targetsatz wird eine zufällige Auswahl von 100 Targets des Munsell Book of Colors verwendet und dafür ein iterativer regularisierter Interpolator zur Rekonstruktion im Intervall $400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 710 \text{ nm}$ mit $\Delta\lambda = 2 \text{ nm}$ ermittelt (siehe Abbildung 2). Als Randbedingung wurde eine spektrale Mindestkorrelation der Interpolationsfunktionen festgelegt. In den Targetssatz einbezogen ist hierbei die simulierte Remissionscharakteristik eines idealen Referenzweiß⁶.

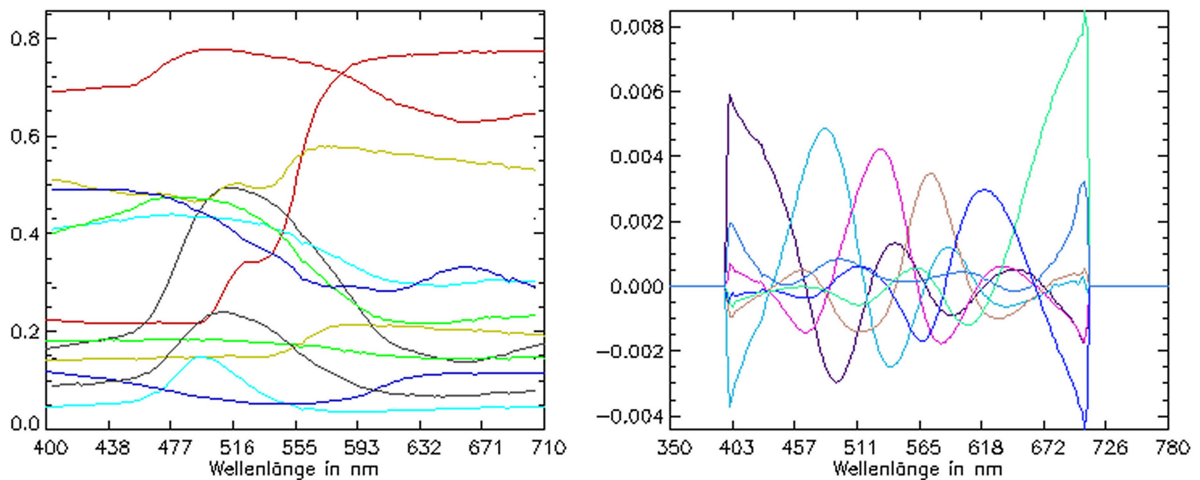
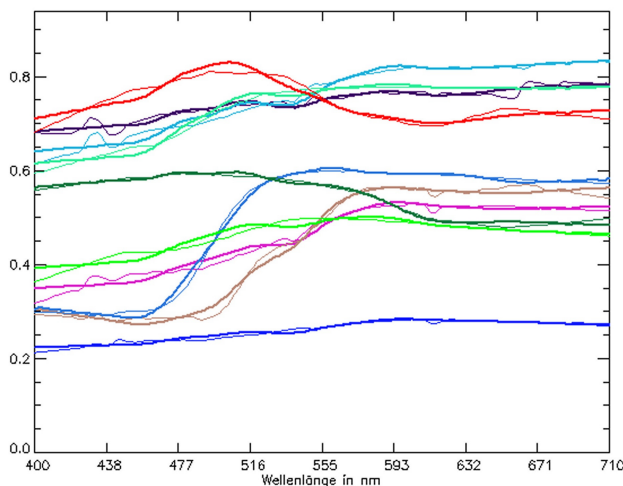


Abbildung 2: Auswahl aus spektralem Referenztargetsatz (Munsell Book of Colors, matt) -links- und zugehöriger Interpolator zur quasi-spektralen Rekonstruktion (Die zu den Abtastwerten zugehörigen Interpolationsfunktionen ergeben sich aus der farblichen Zugeordnung.) -rechts-

Die Ergebnisbewertung des quasi-spektralen Messergebnisses $\tilde{\beta}$ kann sowohl radiometrisch, d.h. $(\tilde{\beta} - \beta)$ oder integral $\|\tilde{\beta} - \beta\|_2$, als auch colorimetrisch für eine beliebig gewählte Lichtart erfolgen. Hierbei ist zu beachten, dass ein Rückschluss von spektralen Abweichungen auf die resultierende colorimetrische Farbdifferenz schwierig ist. Insbesondere Lösungen mit starker einseitiger Annäherung an das korrekte Resultat erscheinen hier zwar aus radiometrischer Sicht akzeptabel, sind jedoch aus Sicht der integralen colorimetrischen Beurteilung häufig unbrauchbar.

⁶ Diese muss physisch nicht vorliegen.

Abgesehen von wenigen Ausreißern lassen sich mit dem errechneten Interpolator alle spektralen Targets des Referenzsatzes mit hoher radiometrischer Güte rekonstruieren. Problematisch sind hierbei unterrepräsentierte Verläufe in umfangreichen Targetsets sowie dynamische Wertebereichsänderungen an den Grenzen des Messintervalls und in Regionen, die durch die Charakteristik des eingesetzten Messlichtes energetisch schlecht belegt sind. Zum Test der Rekonstruktionsgüte auch gestaltähnlicher Targets wird eine Auswahl des Munsell Nearly Neutrals Book of Color -Farbsatzes verwendet. Die 64 Targets wurden zuvor monochromatisch vermessen, im Rahmen der Simulation abgetastet und dann quasi-spektral rekonstruiert. Abbildung 3 zeigt die im toleranzfreien Fall erreichbaren radiometrischen und colorimetrischen Resultate. Durch die Interpolation wird die wesentliche spektrale Gestalt der Vorlagen ohne Messunsicherheiten reproduziert.



Licht- art	$\overline{\Delta E}_{L^*a^*b^*}^{\text{Lichtart}}$	$\max \Delta E_{L^*a^*b^*}^{\text{Lichtart}}$	$\% \Delta E_{L^*a^*b^*}^{\text{Lichtart}} < 1$
D65	0.53	1.34	87,50
A	0.34	0.84	100.00
F2	0.57	1.29	87,50
F12	0.94	2.33	59,37

Abbildung 3: Rekonstruktionsergebnis für eine Targetauswahl der Munsell Nearest Neutrals (dicke Linien) gegenüber der gemessenen Vorlage (dünne Linien) -links- und colorimetrischer Soll-Ist-Vergleich aller 64 Testtargets für eine Auswahl verschiedener DIN-Lichtarten -rechts-

Im Gegensatz zur Simulation weisen reale Mehrbereichsmesssysteme bezüglich der resultierenden Abtastwerte gegenüber einem zugrunde gelegten Modellsystem immer Abweichungen auf. Je nach Kondition des Interpolators äußern sich diese in mehr oder weniger starken radiometrischen Differenzen zwischen der rekonstruierten und der ursprünglich abgetasteten Objektfunktion. Diese Abweichungen sind zum einen durch Toleranzen der spektralen Charakteristik der Systemkomponenten (Sensorempfindlichkeiten, Beleuchtung) oder die örtliche Sensorausleuchtung bedingt und zum anderen eine Folge stochastischer Messunsicherheiten. Selbst bei exemplarbezogener spektraler Charakterisierung der Sensorik verbleibt der z.T. erhebliche Toleranzeinfluss durch die Beleuchtung. Spektrale Messsysteme korrigieren diese deterministischen Einflüsse durch die Bezugnahme zu *einem* bekannten Referenztarget vor der eigentlichen Messung. Die Anwendung dieser Korrekturmethode im Rahmen des Mehrbereichssensors setzt neben einem robustem Interpolatordesign voraus, dass die Toleranzen spektral nicht zu selektiv, d.h. abtastwertbezogen, wirken⁷ oder das zu rekonstruierende Targetset zur Referenz sehr ähnliche Gestalteeigenschaften aufweist. Im anderen Fall kann durch die Verwendung einer regressiven Korrektur die Toleranzwirkung wirkungsvoll kompensiert werden. Dies setzt jedoch die physische Verfügbarkeit von mehreren (ausgewählten) Referenztargets voraus. Hierbei ist für das Mehrbereichsprinzip kenn-

⁷ Dies wird durch Auswahl geeigneter Systemkomponenten (Beleuchtung) unterstützt.

zeichnend, dass die Komplexität des Korrekturmodells im Gegensatz zum Dreibereichsverfahren sehr klein gehalten werden kann.

$\underline{I}_{\text{Modell}}^{\text{est}}(\underline{G}_{\text{Modell}}) : \min(O)$ - modellsystembezogener Interpolator

$$\tilde{\underline{\beta}}_{\text{Real}} = \underline{I}_{\text{Modell}}^{\text{est}} \bullet (\underline{a}_{\text{Real}}) \neq \underline{\beta}$$

$$\tilde{\underline{\beta}}_{\text{Real}} = \underline{I}_{\text{Modell}}^{\text{est}} \bullet \underline{K} \bullet (\underline{a}_{\text{Real}}) \quad \underline{K} = (k_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,k}}$$

Einzeltargetabgleich - "Weissabgleich" $\underline{\beta}^{\text{Calib}}$ regressive lineare Targetsatz-Matrizierung Φ^{Calib}

$$\underline{K} = (k_{ii}) \quad k_{ii} = \left(\frac{(a_{\text{Modell}}^{\text{Calib}})_i}{(a_{\text{Real}}^{\text{Calib}})_i} \right)_{i=1\dots k} \quad \underline{K} = \frac{(\underline{A}_{\text{Real}}) \bullet (\underline{A}_{\text{Modell}})^T}{((\underline{A}_{\text{Real}}) \bullet (\underline{A}_{\text{Real}})^T)}$$

Zur Simulation von Toleranzen wurde die ideale durch eine reale Beleuchtungscharakteristik ersetzt und die kanalbezogenen Sensorcharakteristiken in Mittenposition, Bandbreite und Wichtung⁸ innerhalb von worst-case-Intervallen zufällig variiert.

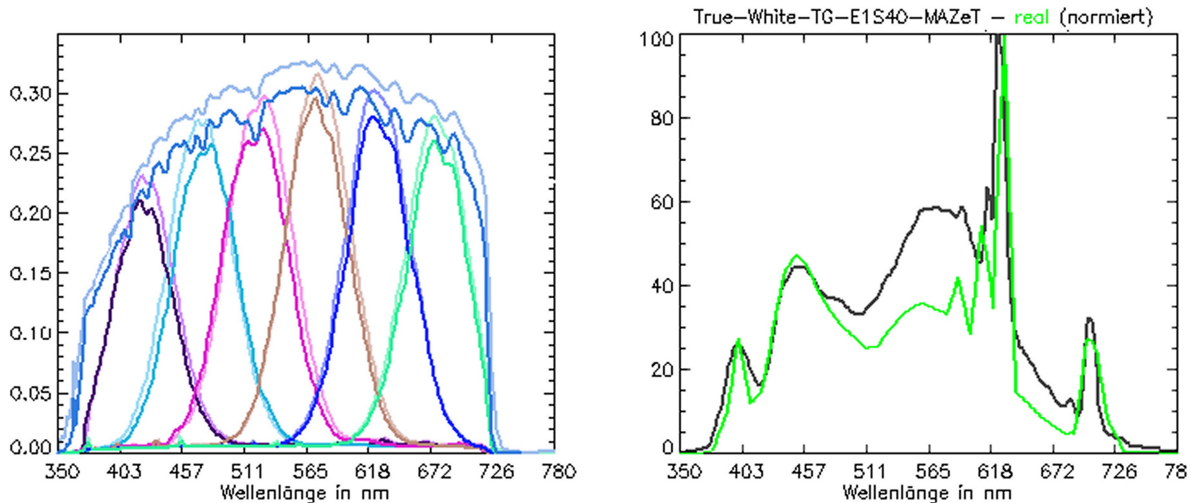


Abbildung 4: Vergleich der spektralen Charakteristik der Modellsystemkomponenten lt. Abbildung 1 mit der w.-c.-Toleranzsimulation: Sensorempfindlichkeiten eines *realen* 6 + 1-Mehrkanalsensors -links, dunkel-, normierte Beleuchtungscharakteristik einer *realen* Weißlicht-LED Typ TG-E1S40 -rechts, grün-

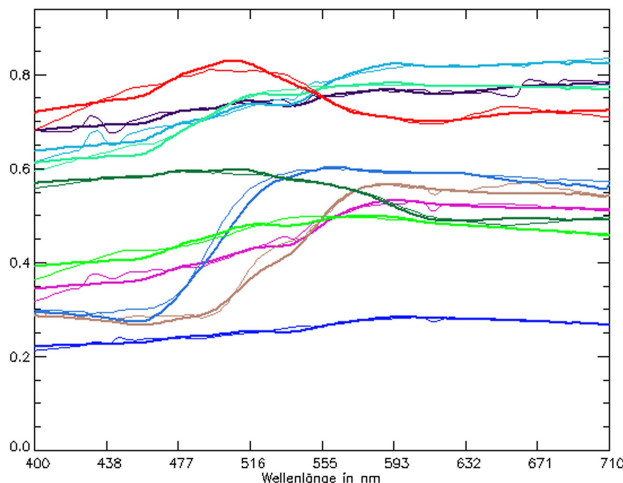
In Abbildung 5 sind die Rekonstruktionsergebnisse im Fall der Einbeziehung von Toleranzen dargestellt. Als Korrekturansatz für die Abtastwerte wurde hier die praktikable Variante der Einzeltargetkorrektur verwendet. Unter Berücksichtigung der starken Abweichungen zwischen den Komponenten des realen und modellhaften Messsystems sind die Auswirkungen auf die radiometrischen und colorimetrischen Güten nur gering. Dasselbe Vorgehen in Zusammenhang mit einem linearen Interpolator $\underline{G}^{+\Phi\text{Opt}}$ führt zu nicht akzeptablen Ergebnissen.

⁸ Dies entspricht im realen Messsystem dem Einfluss der tatsächlich auf ein Sensorelement fallenden Lichtmenge.

5. Zusammenfassung

Der Ansatz des iterativ regularisierten, targetbezogenen Interpolators ist eine geeignete Methode auch bei sehr geringer Kanalzahl akzeptable quasi-spektrale Rekonstruktionsergebnisse zu erzielen. Im Vergleich zur direkten Pseudo-Inversen steht damit ein Interpolator zur Verfügung, der bei ähnlicher spektraler Rekonstruktionsgüte erheblich bessere Toleranzeigenschaften aufweist. Die Messresultate stellen im vorliegenden Fall die Grundlage für colorimetrische Analysen beliebiger Art (z.B. Metameriebewertung) dar. Je nach gewähltem Targetsatz lassen sich die Rekonstruktionseigenschaften unter Beibehaltung des Systemkonzeptes durch einen jeweils applikativ angepassten Interpolator zielgerichtet beeinflussen.

Das Konzept der Pseudo-Inversen ist für beliebig kanalige Sensoranordnungen anwendbar. Die denkbare Applikationsbreite reicht von der spektralen Charakterisierung von breitbandigen Auflicht- und Durchlichtvorlagen bis hin zur spektralen Charakterisierung von Beleuchtungssituationen bezüglich weniger vordefinierter Gestaltklassen. Weitere Untersuchungen in Richtung der optimalen Zahl und Gestalt der Sensorempfindlichkeiten, der Berücksichtigung und Korrektur von Messsystemtoleranzen und zu weiteren Varianten der Regularisierung müssen hierzu noch folgen.



Lichtart	$\overline{\Delta E}_{L^*a^*b^*}^{\text{Lichtart}}$	$\max \Delta E_{L^*a^*b^*}^{\text{Lichtart}}$	$\% \Delta E_{L^*a^*b^*}^{\text{Lichtart}} < 1/3$
D65	1.01	2.18	54.7/100.0
A	0.59	1.51	84.4/100.0
F2	0.86	1.98	64.1/100.0
F12	1.03	2.07	48,4/100.0

Abbildung 5: Rekonstruktionsergebnis für eine Targetauswahl der Munsell Nearest Neutrals (dicke Linien) gegenüber der gemessenen Vorlage (dünne Linien) **im Fall einbezogener Messsystemtoleranzen** -links- und colorimetrischer Soll-Ist-Vergleich aller 64 Testtargets für eine Auswahl verschiedener DIN-Lichtarten -rechts-

6. Literatur

- [1] Lenz, R.; Österberg, M., *Unsupervised filtering of color spectra*, J. Soc. Opt. Am. A, 13(1966)7, S. 1315-1324
- [2] F. H. Imai, S. Quan, M. R. Rosen, R. S. Berns, *Digital camera filter design for colorimetric and spectral accuracy*, Proc. of Third International Conference on Multispectral Color Science 2001, S. 13-16
- [3] St. Helling, E. Seidel, W. Biehlig, *Algorithms for Spectral Color Stimulus Reconstruction with a Seven-Channel Multispectral Camera*, Proc. CGIV 2004, S. 254-258
- [4] L. MacDonald, M.R. Luo, *Colour Imaging*, John Wiley & Sons, 1999, ISBN 0-471-98531-7