

# **Berechnung von Interpolationsgittern für Farbraumtransformationen mit iterativen Vektorraumprojektionsverfahren**

Bernhard Frei  
Chromasens GmbH  
Max - Stromeyer - Str. 116, D - 78467 Konstanz  
eMail : [bernhard.frei@chromasens.de](mailto:bernhard.frei@chromasens.de)  
URL : <http://www.chromasens.de>

Die Chromasens GmbH befaßt sich mit der Entwicklung von Kameras und Bildverarbeitungslösungen, die in hochwertigen Scanlösungen eingesetzt werden. Eine Aufgabe, die sich beim Erfassen von Farbe immer wieder stellt, ist die Abbildung des scannerspezifischen Farbraumes auf einen geräteunabhängigen Farbraum.

Da diese Scanlösungen auch zur Erfassung von großformatigen Vorlagen mit hohem Durchsatz und hoher Auflösung eingesetzt werden, ist oft eine Onlinefarbkorrektur unumgänglich.

Dafür wird eine FPGA-basierte CMM eingesetzt, die bei hohem Durchsatz eine trilineare Interpolation auf einem 3-dimensionalen Gitter durchführt. Da die Ansprüche an die Genauigkeit dieser Lösung hoch sind, wurde eine skalierbare Lösung entwickelt, die ein Farbdatenwort am Eingang auf einen Farbort im Zielfarbraum abbildet. Skalierbar heißt hier, dass bei diesem Modul sowohl die Zahl der verwendeten Gitterpunkte, wie auch die Wortbreite des Rechenwerkes anpepaßt werden können.

Die Genauigkeit der Transformation kann nur so gut sein, wie die verwendeten Stützpunkte des regulären Gitters genau bestimmt sind. Diese Informationen sind in hochwertigen ICC-Profilen, wie sie von Programmen zur Scannerprofilierung erzeugt werden, enthalten und werden hierfür genutzt.

Für die Berechnung dieser Stützpunkte gibt es zwei Primärziele:

- die Stützpunkte müssen eine numerisch möglichst genaue Transformation ermöglichen. Es gibt beim Erfassen von Farben genügend Quellen für Ungenauigkeiten. Dieser Vorgang soll möglichst keine weiteren hinzufügen. Fehler in einem Bereich von CIE  $\Delta e$  um 1 sind daher wünschenswert.

- die Transformation soll möglichst stetige Abbildungen ergeben.

kleine Änderungen im Eingangsfarbraum sollen auch nur kleine Änderungen im Ausgangsfarbraum bewirken. Unstetigkeiten führen zu unerwünschten Farbartefakten.

Diese Ziele sind nicht gut zu vereinbaren. Vor allem wenn Fluoreszenzröhren als Lichtquellen beim Scannen verwendet werden, ergeben sich eher unetige Transformationskennlinien. Es muss daher ein Kompromiß zwischen diesen Forderungen gefunden werden. Wünschenswert wäre es, die Gitterpunkte so zu bestimmen, dass dieses Verhalten steuerbar wird.

Von verschiedenen Autoren wurde die Eigenschaft von interaktiven Projektionsverfahren zu Rekonstruktion von Bildern, denen kein reguläres Gitter unterliegt, untersucht und z.B. für Rekonstruktion von bewegungsverzerrten Bildfolgen erfolgreich verwendet[1],[2].

Da es analog dazu nicht möglich ist die Eigenschaften eines gerätespezifischen Farbraumes in gleichabständigen Messung zu erfassen, wird in dieser Arbeit untersucht, inwieweit diese Verfahren zur Rekonstruktion eines Farbraumes geeignet ist. Die Position der Abtastpunkte ist in diesem Fall durch die Koordinaten der Farbflächen im gerätespezifischen Farbraum, die zur Messung verwendet werden, gegeben.

## **Zum Hintergrund der Projektionsverfahren**

Projektion onto convex sets (=POCS) ist ein iteratives Verfahren um Punkte, Vektoren oder Funktionen zu finden, die an der Schnittfläche konvexer Mengen liegen.

Im Gegensatz zu den bekannteren Optimierungsverfahren, wie die Minimierung des Fehlerquadrates bei der Gausschen Fehlerquadratmethode oder der Suche nach einem Betragsminimum bei der linearen Optimierung muss der Lösungsraum über bestimmte Eigenschaften der Randbedingungen vorgegeben sein.

Eine der ersten Veröffentlichungen zu diesem Verfahren war der Artikel von S. Kaczmarz "Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichung", der 1937 erschien.

Einen guten Überblick über die Entstehung dieser Verfahren gibt die Dissertation von

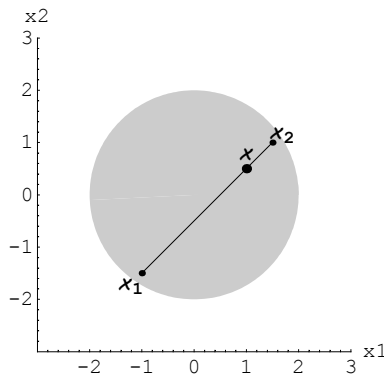
Manfred Mayer [3]. Die tragende Rolle bei diesen Verfahren hat der Fixpunktsatz von Z. Opial. Mit diesem ist es ihm gelungen ist die Konvergenz dieses Verfahrens nachzuweisen (1967). In [3] findet sich auch eine Darstellung dieses Beweises.

## Was ist eine konvexe Menge

Definition: Eine abgeschlossene Teilmenge  $C$  eines Hilbertraumes  $H$  heißt konvex, wenn aus  $x \in C$  und  $y \in C$  auch die Verbindungsstrecke

$$\alpha x + (1 - \alpha) y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ in } C \text{ liegt.}$$

Ein Beispiel hierfür ist die Menge:  $C_1 = \{ \mathbf{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \} \in \mathbb{R}^2$



$\mathbf{x} \in C_1$  liegt zwischen den Punkten  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$

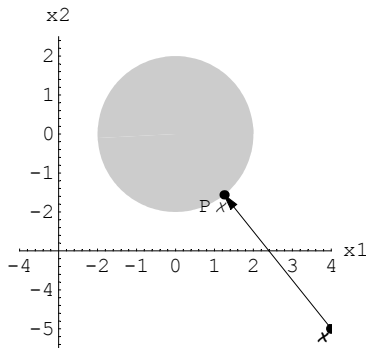
Zu dieser Menge  $C_1$  gehört ein Projektor  $P$ . Dieser liefert für eine Funktion  $g$  eine Vorschrift zur Abbildung dieses Punktes so, dass der Abstand zu einem Punkt der Menge  $C_1$  minimiert wird.

$$|f - P f| = \min |f - g|$$

Der Projektor der Menge  $C_1$  für einen Punkt  $\mathbf{x}$  ist:

$$P_1 \mathbf{x} = \begin{cases} 2(\mathbf{x} / |\mathbf{x}|) & \text{wenn } \mathbf{x} \notin C_1 \\ \mathbf{x} & \text{wenn } \mathbf{x} \in C_1 \end{cases}$$

Welche Wirkung hat dieser Projektor nun? Wird er auf einen Punkt P außerhalb der Menge  $C_1$  angewendet, bildet er diesen auf das nächstliegende Element dieser Menge ab.

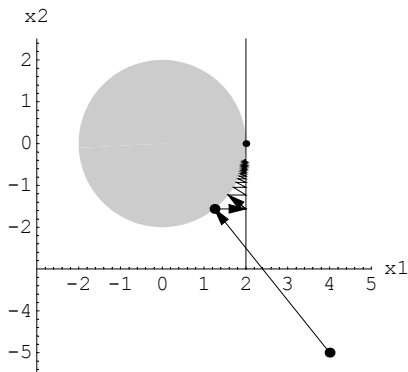


Eine andere konvexe Menge  $C_2$  sei eine Gerade mit der Gleichung  $x_1 = 2$ . Der Projektor für diese Gerade ist

$$P_2 x = \{2, x_2\}$$

Durch iterative Anwendung der beiden Projektoren lässt sich der Punkt finden, der beiden Mengen  $C_1$  und  $C_2$  gemeinsam ist.

$$x^{k+1} = P_1 P_2 x^k$$



## Irreguläres Sampling

Wegen der leichteren Darstellbarkeit wird die Vorgehensweise zunächst an einem eindimensionalen Beispiel dargestellt.

Die Aufgabe stellt sich wie folgt: Es gibt eine Näherung  $y(x)$  für unbekanntes Transformationsfunktion  $g(x)$  zu finden. Von dieser sind  $n$  Funktionswerte an den Stellen  $\{x_1 \dots x_i \dots x_n\}$  bekannt. Der Abstand zwischen den Werten ist nicht gleich.

Eine gesuchte Eigenschaft dieser Funktion ist, dass sie stetig sein soll. Eine grundsätzliche Eigenschaft bandbegrenzter Funktionen ist, dass sie analytisch sind. Das heißt, dass sie durch eine konvergente Reihenentwicklung darstellbar und sogar beliebig oft differenzierbar sind.

Es läßt sich nun zeigen, dass die Menge der Funktionen, für die eine Fouriertransformierte existiert und für die gilt

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \begin{cases} F(\omega) & \text{wenn } |\omega| \leq 2\pi B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sowohl konvex wie auch geschlossen ist. Der Projektor lautet dann:

$$P y(x) = \begin{cases} \mathcal{F}\{y(x)\} & \text{if } |\omega| \leq 2\pi B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zur Lösung tragen dann die Mengen  $C_i$  für die gilt:

$$C_i = \{y(x) : y(x_i) = g(x_i) \text{ und } \mathcal{F}\{y(x)\} = 0 \text{ für } |\omega| \leq 2\pi B\}$$

bei.

Da die  $g(x_i)$  nicht an den gleichabständigen Stützpunkten gegeben sind, wird die Funktion  $y$  mit dem Verschiebungsoperator  $T$  um den Abstand  $d_x$  zum nächsten Stützpunkt geschoben. Der Projektor lautet dann:

$$P y(x) = \begin{cases} T_{d_x}(y(x)) & \text{wenn Integer}(x_i) = x \\ y(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Vorgehensweise unterscheidet sich deutlich von anderen Ansätzen. Meist wird ein Polynom an gegebene Punkte angepaßt und der Fehlerabstand minimiert oder es werden bei den Splinefunktionen diese abschnittsweise konstruiert. Der Umfang der möglichen Lösungen ist bei POCS wesentlich größer. Es wird lediglich gefordert, dass sie der

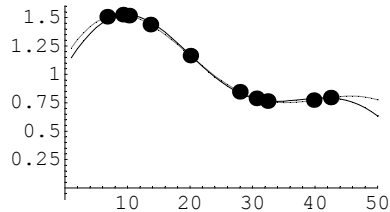
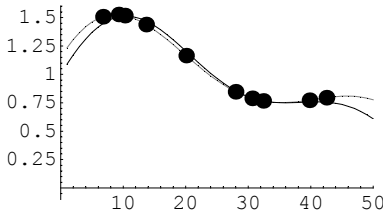
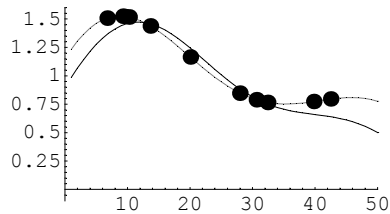
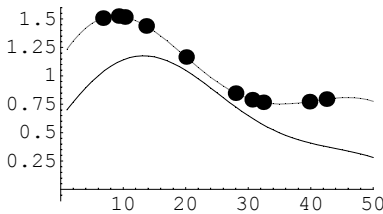
$L^2$  Norm genügen und bandbegrenzt sind. Über die Festlegung der Bandbreite  $B$  lassen sich grundsätzliche Eigenschaften der Approximationsfunktion bestimmen.

Ein Beispiel:

Von der Funktion  $g(x)$  :

$$g(x) = \sin(2\pi x / 80) + \cos(\pi/8 + 2\pi x / 60) + \sin(\pi/10 + 2\pi x / 150)$$

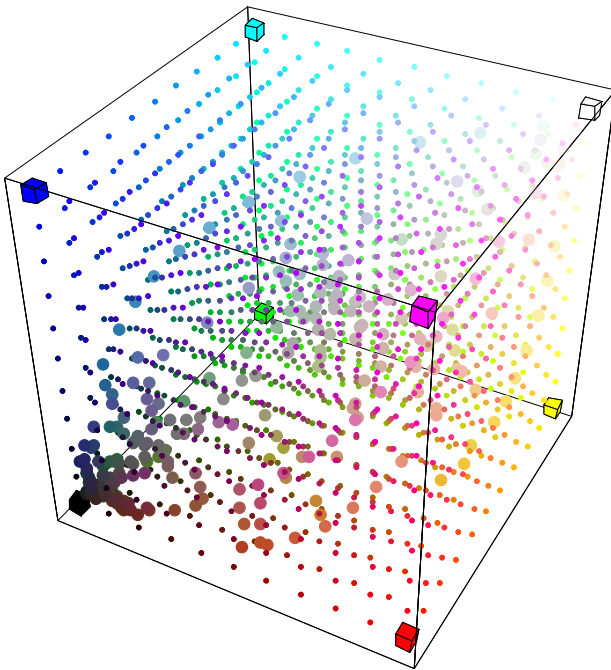
sind für 10 zufällig ausgewählte  $x_i \in R$  Argumente die Funktionswerte bekannt. Gesucht ist nun die Funktion die im Bereich dieser Argumente an den  $x_i \in N$  eine möglichst gute Näherung bildet und zwischen diesen Punkten einen glatten Verlauf hat.



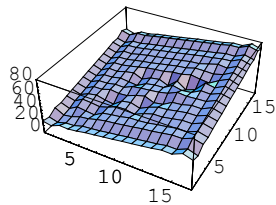
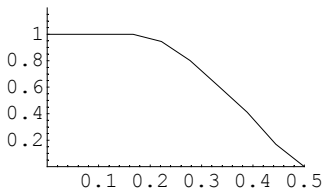
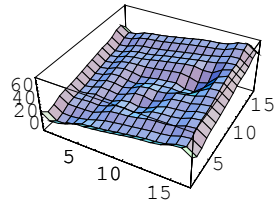
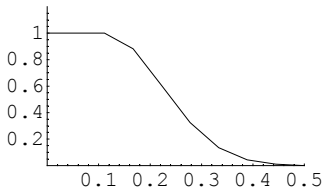
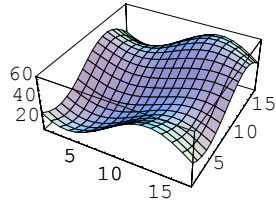
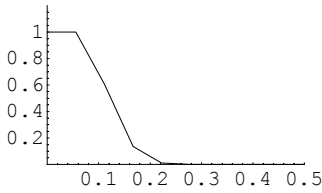
Die Rekonstruktion dieser Funktion gelingt nach 50 Iterationschritten im Bereich der Samplepunkte sehr gut. Durch die Verwendung der Fouriertransformation ist der Translationsoperator einfach auf mehrere Dimensionen zu erweitern und so auch für die Rekonstruktion von mehrdimensionalen Funktionen geeignet.

## Aufbau des Stützgitters

Für die Farbraumtransformation mit regulären mehrdimensionalen Stützgittern bilden die Farbfelder des IT8 die irregulären Zwischengitterpunkte. Mit diesen wird eine Hyperebene konstruiert, die in jeder Dimension bandbeschränkt ist. Ob dieses Verfahren geeignet ist, ist davon abhängig, ob bandbeschränkte Funktionen eine geeignete Funktionsmenge bilden.



Die 3 - dimensionale Rekonstruktionsebene läßt sich nicht darstellen, hier eine Auswahl 3 Ebenen die sich mit Rekonstruktionsfiltern unterschiedlicher Bandbreite  $B$  ergeben:



Rechnet man aus den Gitterstützpunkten auf die Testfelder zurück, ergibt sich bei 17 Stützpunkten in jeder Dimension eine mittlere Abweichung von

$$\Delta_{\text{CIE2000}} = \{8.96, 4.80, 1.53\}$$

für diese Beispiele.

Für eine effiziente Implementierung ist das gewählte Fourierinterpolationsverfahren wegen des Rechenaufwandes und der unterliegenden zyklischen Interpretation der Daten wenig geeignet. Es erlaubt aber eine genaue Interpolation im mehrdimensionalen Raum und ermöglicht so eine Abschätzung der mit diesem Verfahren erreichbaren Genauigkeit.



## Literatur:

- [1] K.D. Sauer und J.P. Allebach, "Iterative reconstruction of band-limited images from nonuniformly spaced samples",  
IEEE Trans. Circuits Syst. vol 34 no.12, Dec. 1987
  
- [2] R. Staninski und J. Konrad, "POCS-based image reconstruction from irregularly-spaced samples", Proc. Int. Conf. on Image Processing, ICIP-2000, Sep. 10-13, 2000
  
- [3] M. Mayer, "POCS-Methoden, Dissertaion zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors an der Universität Wien", Oktober 2000  
<http://www.mat.univie.ac.at/~nuhag/papers/mayerPOCS.pdf>
  
- [4] H. Stark u. Y.Yonghi, "Vector space projections", Verlag Wiley, ISBN 0-471-24140-7